SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. OBRECHT

IL PROBLEMA DI CAUCHY PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE IN UNO SPAZIO DI BANACH

14-21 APRILE 1983

1. L'EQUAZIONE $u^{(n)} = Au$

I primi risultati sul problema di Cauchy relativo a equazioni differenziali lineari di ordine superiore al primo in uno spazio di Banach sono dovuti a Hille [8] e risalgono al 1952. L'equazione da lui studiata era del tipo

$$(1) \qquad u^{(n)} = B^n u,$$

dove B è il generatore infinitesimale di un semigruppo .

Dopo aver dimostrato un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo all'equazione (1) in ipotesi abbastanza generali sull'operatore B, Hille osservò che, se B è limitato, la soluzione del problema di Cauchy poteva essere rappresentata - in analogia con il caso finito dimensionale - come combinazione lineare degli esponenziali $e^{t\eta^K B}$, $K = 0,\dots,n-1$, dove $\eta = \exp(2\pi i/n)$. Questo lo condusse a fare l'ipotesi che tutti gli operatori $\eta^K B$, $K = 0,\dots,n-1$, fossero generatori di semigruppi. Questo, però comporta che, se $n \geq 3$, B sia limitato.

Forse questo risultato - sostanzialmente negativo - ha fatto sì che per circa quindici anni non vi siano più stati risultati significativi su questo problema.

L'idea di Hille fu ripresa e sistematizzata da Fattorini [4] nel modo seguente.

Sia A un operatore lineare in uno spazio di Banach complesso X con insieme risolvente (che indicheremo con $\rho(A)$)non vuoto. Il problema di Cauchy

$$(2) \qquad \begin{cases} u^{(n)} = Au, \text{ in } R^+, \\ u^{(k)}(0) = x_k, \ k=0,\dots,n-1, \end{cases}$$

si dice ben posto se, e solo se:

i) esiste un sottospazio $\mathcal{D}$, denso in X, tale che, $\forall\ x_o,\dots,x_{n-1} \in \mathcal{D}$ esista una soluzione del problema (2), cioè una funzione $u \in C^{(n)}(\underline{R}^+;X)$, tale che

$$u(t) \in \mathcal{D}(A)^{(1)}, \quad u^{(n)}(t) = Au(t), \ \forall\ t \in R^+,$$

$$\lim_{t \to o+} u^{(k)}(t) = x_k, \quad k = 0,1,\dots,n-1;$$

ii) se $(u_r)_{r \in N}$ è una successione di soluzioni dell'equazione $u^{(n)} = Au$, tale che

$$\lim_{r \to \infty} \lim_{t \to o+} u_r^{(k)}(t) = 0, \quad k=0,\dots,n-1,$$

allora

$$\lim_{r \to \infty} u_r(t) = 0, \forall t \in R^+ .$$

Evidentemente, un problema ben posto ha una sola soluzione.

Se il problema (2) è ben posto, esisteranno della famiglie di operatori

$$S_j(t) : \mathcal{D} \longrightarrow X, \quad t \in R^+, \quad j = 0,1,\dots,n-1,$$

---

(1) Qui e nel seguito con $\mathcal{D}$ (B) indicheremo il dominio dell'operatore li_ neare B.

definiti da

$$(S_j(t))x = u_j(t),$$

dove u_j è la soluzione del problema

$$\begin{cases} u^{(n)} = Au, \\ u^{(k)}(0) = \delta_{jk}x, \ k=0,\dots,n-1, \end{cases}$$

dove δ_{jk} è il simbolo di Kronecker.

Per ii), $S_j(t)$ è limitato e, quindi, può essere esteso a tutto X per continuità. Inoltre, se $x \in \mathcal{D}$, $S_j(t)x$ è derivabile n volte.

Nel seguito di questo paragrafo supporremo sempre che il problema (2) sia ben posto.

E' ovvio che, se u è soluzione del problema (2), allora $u(t) = \sum_{j=o}^{n-1} S_j(t)x_j$.

Riportiamo alcune proprietà degli operatori $S_j(t)$, che verranno detti i propagatori del problema (2).

Lemma 1. Se $x \in \mathcal{D}$,

$$S'_k(t)x = S_{k-1}(t)\,x, \ k = 1,\dots,n-1,$$

$$S'_o(t)x = AS_{n-1}(t)x\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Lemma 2.1 in [4].

Lemma 2. Gli operatori A, $S_o(t_o),\dots, S_{n-1}(t_{n-1})$ commutano $\forall t_o,\dots,t_{n-1} \in R^+$.

Dimostrazione. Si veda il Lemma 2.2 in [4].

Lemma 3. $\forall s,\ t \in R^+$, si ha:

$$S_k(s+t) = \sum_{j=o}^{k} S_j(s)\, S_{k-j}(t) + A \sum_{j=k+1}^{n-1} S_j(s) S_{n-j+k}(t),$$

$k = 0,\dots,n-2,$

$$S_{n-1}(s+t) = \sum_{j=o}^{n-1} S_j(s)\, S_{n-j-1}(t).$$

Dimostrazione. Siano $x \in \mathcal{D}$ e $k \in \{0,\dots,n-1\}$ e fissiamo $t \in R^+$; allora la funzione

$$V_{k,t}(s) = S_k(s+t)x$$

è soluzione del problema

$$\begin{cases} V^{(n)} = AV\ , \\ V^{(h)}(0) = S_k^{(h)}(t)\ x, \quad h = 0,\dots,n-1, \end{cases}$$

onde

$$V_{k,t}(s) = \sum_{j=o}^{n-1} S_j(s)\, S_k^{(j)}(t)x.$$

Per i Lemmi 1 e 2, se $k \in \{0,\dots,n-2\}$,

$$S_k(s+t)x = \sum_{j=o}^{k} S_j(s)\, S_{k-j}(t)\, x + \sum_{j=k+1}^{n-1} S_j(s)\, S_o^{(j-k)}(t)x =$$

$$= \sum_{j=o}^{k} S_j(s)\, S_{k-j}(t)x + A \sum_{j=k+1}^{n-1} S_j(s)\, S_{n-j+k}(t)x.$$

Se $k = n-1$, la seconda somma nelle uguaglianze precedenti manca, mentre la prima rimane invariata.

L'affermazione segue allora dalla densità di $\mathcal{D}$.

Riportiamo ora il risultato principale di Fattorini [4] .

Teorema 4. Supponiamo che il problema (2) sia ben posto e che i suoi propagatori siano di tipo esponenziale, cioè esistono M, $\omega \in R^+$, tali che

$$\| S_j(t)x \| \leq M e^{\omega t} , \forall t \in R^+, \forall x \in X,$$

$j=0,\dots,n-1$. Allora, se $n \geq 3$, A è limitato.

Osservazione. Fattorini ha in realtà dimostrato il teorema senza supporre che i propagatori siano di tipo esponenziale; la dimostrazione, però, risulta più complessa e meno chiarificatrice.

Dimostrazione del Teorema 4. Sia $x \in \mathcal{D}$ e poniamo

$$R(\lambda) x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_{n-1}(t) x \, dt, \quad \lambda \in C, \ \mathrm{Re}\, \lambda > \omega.$$

Integrando ripetutamente per parti e utilizzando il Lemma 1, si ha:

$$R(\lambda)x = [- \lambda^{-1} e^{-\lambda t} S_{n-1}(t) x]_0^{+\infty} + \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S'_{n-1}(t)x dt =$$

$$= \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_{n-2}(t) x \, dt = \dots = \lambda^{1-n} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_o(t) x \, dt =$$

$$= \lambda^{1-n} ([-\lambda^{-1} e^{-\lambda t} S_o(t)x]_0^{+\infty} + \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S'_o(t) x \, dt) =$$

$$= \lambda^{-n} (x + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} A S_{n-1}(t) x \, dt).$$

Ciò prova che $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e che

$$(3) \qquad R(\lambda)\, x = \lambda^{-n}\, (x + AR(\lambda)\, x).$$

Per la densità di $\mathcal{D}$ in X, la (3) vale $\forall\, x \in X$ e, quindi, $R(\lambda)\, x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, x \in X$. Si ha poi:

$$(\lambda^n - A) R(\lambda)\, x = x \ , \quad \forall\, x \in X,$$
$$R(\lambda)\, (\lambda^n - A)\, y = y + AR(\lambda) y - R(\lambda) Ay = y, \ \forall\, y \in \mathcal{D}(A),$$

in quanto, per quanto già provato e per il Lemma 2,

$$AR(\lambda)\, y = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AS_{n-1}(t)\, y\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, S_{n-1}(t)\, Aydt =$$
$$= R(\lambda) Ay$$

Perciò, se $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, $\lambda^n \in \rho\,(A)$ e $R\,(\lambda) = -\,(A-\lambda^n)^{-1}$. D'altra parte, se $n \geq 3$, $\{\lambda^n \in C;\ \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ è un intorno dell'infinito. Perciò $(A-\lambda^n)^{-1}$ è analitica in un intorno dell'infinito, privato al più del punto all'infinito. Ma poiché $\lim\limits_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} R(\lambda)x = 0$, ne viene che $(A-\lambda^n)^{-1}$ è limitato in un intorno dell'infinito e, quindi, che A è limitato.

In seguito a questo risultato, le ricerche sulle equazioni differenziali di ordine superiore al primo in uno spazio di Banach si sono rivolte essenzialmente in queste direzioni:

a) studio di problemi diversi da quello di Cauchy, quali il cosiddetto problema di Cauchy ridotto in R^+, che consiste nell'assegnare un numero di condizioni iniziali minore dell'ordine dell'equazione (già considerato nel lavoro citato [8] di Hille e ripreso da Fattorini e Radnitz [6] , da Fattorini [5] e da Dubinskii [3]) e problemi ai limiti in un intervallo limitato (sui quali esiste una vastissima letteratura, soprattutto russa, per lo più dedicata a equazioni del secondo ordine in uno spazio di Hilbert);

b) studio del problema di Cauchy per equazioni del tipo

$$u^{(n)} + \sum_{k=o}^{n-1} A_k u^{(k)} = 0, \tag{4}$$

dove gli A_k $(k = 1,\dots,n-1)$ non sono tutti nulli;

c) studio del problema di Cauchy per equazioni del tipo

$$u'' = Au$$

e dei loro propagatori (le cosiddette funzioni coseno e seno astratte).

Nel seguito, esporremo alcuni risultati relativi ai problemi b) e c).

2. L'EQUAZIONE $u^{(n)} + \sum_{k=o}^{n-1} A_k u^{(k)} = 0$

Per pervenire - sia pure con considerazioni euristiche - a esaminare gli operatori che risulteranno fondamentali nello studio del problema di Cauchy per l'equazione in esame, può essere opportuno considerare, per un momento, il caso ormai classico delle equazioni del primo ordine.

Sia u una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + Au = 0 \ , \ \text{in } R^+, \\ u(0) = u_o \quad , \end{cases} \tag{5}$$

dove u_o è un assegnato elemento dello spazio di Banach X. Effettuando una trasformata di Laplace formale del problema (5), si ottiene

$$(\lambda+A)\ \hat{u}\ (\lambda) = u_o,$$

dove $\hat{u}$ indica la trasformata di Laplace di u. Risulta perciò evidente come le proprietà spettrali dell'operatore -A svoltano un ruolo essenziale nello studio del problema (5); in particolare, non è irragionevole aspettarsi che, sotto opportune condizioni su A e su u_0, la soluzione del problema (5) possa essere scritta come antitrasformata di Laplace

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t} \, (A+\lambda)^{-1} u_0 d\lambda \ .$$

Consideriamo ora il seguente problema per un'equazione di ordine n.

$$(6) \qquad \begin{cases} u^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k u^{(k)} = 0, \text{ in } R^+, \\ u^{(h)}(0) = 0, \qquad , \ h=0,\dots,n-2, \\ u^{(n-1)}(0) = x \end{cases}$$

(la scelta di questo particolare problema è dovuta sia a motivo di semplicità, sia alla particolare analogia che esso presenta con quello relativo a un'equazione del primo ordine).

Eseguendo un'altra trasformata di Laplace formale, il problema (6) diventa

$$(\lambda^n + \sum_{K=0}^{n-1} \lambda^K A_K) \, \hat{u}(\lambda) = x.$$

E' allora abbastanza naturale chiedersi se l'inverso (quando esiste) del polinomio a coefficienti operatori

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k$$

(qui e nel seguito indicherò - per ottenere delle scritture più compatte - con A_n l'operatore identità) svolga per le equazioni di ordine superiore un ruolo analogo a quello che il risolvente svolge per le equazioni del primo ordine. In particolare, ci si può chiedere sotto quali condizioni la soluzione del problema (6) sia rappresentabile come antitrasformata di Laplace

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda t}\, P^{-1}(\lambda)\; x\; d\lambda.$$

E' opportuno rilevare che, se $\rho(P) = \{\lambda \in C;\ P(\lambda)$ è invertibile con inverso limitato e ovunque definito$\} \neq \emptyset$ e gli A_k sono chiusi, la famiglia di operatori $P^{-1}(\lambda)$ gode di diverse proprietà analoghe al risolvente, quali l'essere una funzione analitica e il fatto che $\rho(P)$ è aperto. Naturalmente, senza ipotesi di commutatività sugli A_k, non è sperabile che questi commutino con $P^{-1}(\lambda)$, né che $P^{-1}(\lambda)$ commuti con $P^{-1}(\mu)$.

Il primo autore a utilizzare questa famiglia di operatori fu Chazarain [2] , il quale studiò sotto quali condizioni il problema di Cauchy per l'equazione

$$\sum_{K=0}^{n} A_K\, u^{(K)} = f$$

è ben posto nell'ambito delle distribuzioni vettoriali o delle distribuzioni di Gevrey.

Per enunciare un risultato tipico di Chazarain, introduciamo alcuno notazioni.

Indichiamo con $\mathcal{D}$ [$\mathcal{D}$-] lo spazio delle funzioni da R a C col supporto compatto superiormente limitato , munito della topologia usuale, e, se Y è uno spazio di Banach, con $\mathcal{D}'(Y)$ [$\mathcal{D}'_+(Y)$] lo spazio degli operatori lineari limitati da $\mathcal{D}$ [$\mathcal{D}$-] a Y.

Allora, se T è una distribuzione scalare e $y \in Y$, $T \otimes y$ indi ca la distribuzione di $\mathcal{D}'(Y)$ definita da

$$\langle T \otimes y, \ \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle \, y.$$

Siano ora X e $\mathcal{D}$ due spazi di Banach complessi, $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{D}; X)$; diremo che il problema di Cauchy per l'operatore

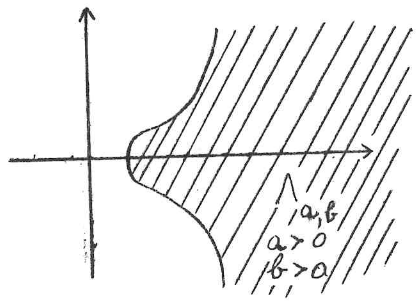
$$P = \sum_{K=0}^{n} A_K \otimes \left(\frac{d}{dt}\right)^K \tag{7}$$

è ben posto nel senso delle distribuzioni se, e solo se, $\forall f \in \mathcal{D}'_+(X)$, $\exists$ una soluzione unica $u \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{D})$ dell'equazione

$$P * u = f,$$

tale che min supp $u \geq$ min supp f e che la funzione $f \to u$ sia continua da $\mathcal{D}'_+(X)$ a $\mathcal{D}'_+(\mathcal{D})$.

Il risultato di Chazarain è il seguente.



Teorema 5. Il problema di Cauchy per l'operatore (7) è ben posto se, e solo se, esistono $a, b \in [0, +\infty[$ e un polinomio q a coefficienti positivi, tali che:

i) $\{\lambda \in C; \exists P^{-1}(\lambda) \in L(X;\mathcal{D})\} \supset \Lambda_{q,b} = \{\lambda \in C; \ \mathrm{Re}\,\lambda \geq a \log(1+|\lambda|)+b\}$;

ii) $\| P^{-1}(\lambda) \|_{L(X;\mathcal{D})} \leq q(|\lambda|), \forall \lambda \in \Lambda_{a,b}$.

Un risultato dello stesso tipo, anche se la regione $\Lambda_{a,b}$ e la stima su $P^{-1}(\lambda)$ sono molto diverse, vale anche per il problema di Cauchy nell'ambito delle distribuzioni di Gevrey.

Successivamente, Dubinskii [3], sulla base della collocazio ne dello spettro puntuale di P, $\sigma_p(P) = \{\lambda \in C; \exists u \in \bigcap_{k=0}^{n} \mathcal{D}(A_k) - \{0\}$: $P(\lambda)\, u = 0\}$, è pervenuto a una classificazione delle equazioni del tipo

$$(8) \qquad P(\tfrac{d}{dt})\, u \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k\, u^{(k)} = f.$$

Più precisamente, Dubinskii chiama parabolica l'equazione (8) se $\sigma_p(P)$ è contenuto in un semipiano Re $\lambda \leq \gamma_0$ ed esiste uno spazio di Banach $Y \subset X$, tale che $P^{-1}(\lambda)/_Y$ sia analitico e soddisfi le stime

$$(9) \qquad \| A_j P^{-1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \leq C(a)\ (1+|\lambda|)^{k-j} \quad , \ j = 0,\dots,n,$$

$\forall\lambda \in C$, Re $\lambda \geq a > \gamma_0$, dove k è un intero non negativo opportuno.

Nel caso in cui $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ sia la realizzazione in L^p di un operatore parabolico secondo Petrovskii, si può scegliere $Y = X$ e $k = 0$ e, inoltre, $C-\rho(P)$ è interamente contenuto in un settore del piano complesso di ampiezza minore di π.

Per le equazioni paraboliche, Dubinskii prova l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali nulli in opportuni spazi di Sobolev con un peso esponenziale all'infinito. Le ipotesi sul secondo membro dell'equazione dipendono dal numero k che compare nella (9).

Vengono poi dette paraboliche retrograde le equazioni per le quali $P(-\frac{d}{dt})$ è parabolico. Naturalmente, per questi tipo di equazioni non si possono assegnare condizioni iniziali.

Dubinskii chiama poi iperbolico un operatore che sia contemporaneamente parabolico e parabolico retrogrado. Per un operatore siffatto è corretto sia il problema di Cauchy - con dati iniziali nulli - sia il problema senza condizioni iniziali.

Tutti questi problemi (e anche il problema di Cauchy ridotto per le equazioni chiamate da Dubinskii quasiellittiche e quasiiperboliche) sono trattati con un metodo unico, seguendo l'idea introdotta da Grisvard [7] per trattare le equazioni del primo ordine: si pensa $\frac{d}{dt}$, con o senza condizioni iniziali, come un operatore B e, per mezzo delle posizioni rispettive degli spettri di B e di $P(\lambda)$, si riesce a trattare l'equazione

$$\sum_{k=0}^{n} A_k B^k u = f.$$

In questo modo, però, le condizioni iniziali, conglobate nella scelta del dominio di B, devono essere necessariamente nulle. Questo non sarebbe un inconveniente se esistesse un buon rilevamento dei dati iniziali. Non è detto però che questo vi sia.

Infatti, Brézis e Fraenkel [1] hanno dimostrato il seguente

<u>Teorema 6</u>. Siano $X_0, \dots, X_p$ spazi di Banach, tali che X_k sia immerso con continuità in X_{k+1} e che X_0 sia denso in X_p. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché $\forall a = (a_0, \dots, a_p) \in \times_{j=0}^{p} X_j$ esista $u \in \bigcap_{j=0}^{p} \mathscr{C}^{(k)}([0,1]; X_k)$, tale che $u^{(k)}(0) = a_k, k=0,\dots,p$, è che

$$\lim_{t\to 0+} L(t,a) = 0, \tag{10}$$

dove $L(t,a) = \inf_{\rho\in X_0} \sum_{j=0}^{p} t^{-j} \| \rho - \sum_{i=0}^{j} \frac{t^i}{i!} a_i \|_{X_i} \equiv \inf_{\rho\in X_0} L(t,a,\rho)$.

Dimostriamo solo la necessità della condizione. Se u è una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema, allora, poiché $u(t)\in X_0$, si ha

$$L(t,a) \leq L(t,a,u(t)), \quad \forall t\in]0,1] .$$

Poiché

$$\| u(t) - a_0 \|_{X_0} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$$

$$e \quad t^{-k} \| u(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!} a_i \|_{X_k} =$$

$$= t^{-k} \| \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t (t-s)^{k-1} (u^{(k)}(s) - a_k) ds \|_{X_k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{k!} \max_{[0,t]} \| u^{(k)} - a_k \|_{X_k} \xrightarrow[t \to 0+]{} 0 \quad , \quad k = 1, \dots p,$$

ne viene che $L(t,a,u(t)) \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$, come volevasi.

La condizione (10) è sempre verificata se $p = 1$ (la situazione applicabile a equazioni del secondo ordine); infatti, in questo caso, $\forall \rho, \varkappa \in X_0$, si ha:

$$L(t,(a_0,a_1), \rho + \varkappa) = \| \rho + \varkappa - a_0 \|_{X_0} + t^{-1} \| \rho + \varkappa - a_0 - t a_1 \|_{X_1} \leq$$

$$\leq \| \rho - a_0 \|_{X_0} + t^{-1} \| \rho - a_0 \|_{X_1} + \| \varkappa \|_{X_0} + t^{-1} \| \varkappa - t a_1 \|_{X_1} =$$

$$= L(t,(a_0,0), \rho) + L(t,(0,a_1), \varkappa).$$

Ora, scegliendo $\rho = a_0$, risulta $L(t,(a_0,0),\rho) = 0$, mentre, scegliendo $\varkappa = t\chi$, si ha

$$L(t,(0,a_1), \varkappa) = t \| \chi \|_{X_0} + \| \chi - a_1 \|_{X_1}.$$

Allora, per la densità di X_0 in X_1, $\forall \varepsilon \in R^+$, $\exists \chi_\varepsilon \in X_0$, tale che $\| \chi_\varepsilon - a_1 \|_{X_1} < \varepsilon/2$ e, quindi, se $t \in]0, \varepsilon/(2 \| \chi_\varepsilon \|_{X_0})[$, risulta $L(t,(0,a_1), \chi_\varepsilon) < \varepsilon$.

Se $p \geq 2$, ciò non è più vero in generale come mostra l'esempio seguente di Brézis e Fraenkel.

Siano $X_0 = L^\infty(]0,1[)$, $X_1 = X_2 = L^1(]0,1[)$, $a_0 = a_2 = 0$, $a_1(x) = x^{-1/2}$. Se $\varkappa \in L^\infty(]0,1[)$, dobbiamo stimare

$$L(t,a,t\varkappa) = t \| \varkappa \|_{L^\infty} + (1+t^{-1}) \| \varkappa - a_1 \|_{L_1}.$$

Posto $\lambda = \|\gamma\|_{L^\infty}$, si ha, se $\lambda \geq 1$,

$$\|\gamma - a_1\|_{L^1} \geq \int_0^{\lambda^{-2}} |\gamma(x) - x^{-\frac{1}{2}}|\, dx \geq \int_0^{\lambda^{-2}} (x^{-\frac{1}{2}} - \lambda)\, dx = \lambda^{-1},$$

onde $L(t,a,t\gamma) \geq t\lambda + (t\lambda)^{-1} \geq 2$, $\forall t \in]0,1]$,

mentre, se $0 \leq \lambda < 1$, $\|\gamma - a_1\|_{L^1} \geq \int_0^1 (x^{-\frac{1}{2}} - \lambda)\, dx = 2 - \lambda > 1$,

onde $L(t,a,t\gamma) \geq (1+t^{-1}) \|\gamma - a_1\|_{L^1} > 2$.

Pertanto, $L(t,a) \geq 2$, $\forall t \in]0,1]$ e, quindi, la condizione necessaria non è verificata.

Questo esempio può sembrare un po' artificioso, ma - a quanto mi risulta - non sono note condizioni sufficientemente generali sugli spazi X_k che garantiscano automaticamente la validità della condizione del Teorema 4.

E' però possibile - almeno nel caso parabolico - studiare il problema di Cauchy con dati iniziali non nulli, servendosi di metodi simili a quelli dei semigruppi analitici. In tal caso, l'operatore di $L(X)$

$$U(t) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma e^{\lambda t} P^{-1}(\lambda)\, d\lambda,$$

dove Γ è una opportuna curva orientata di $\mathbb{C}$ che "circonda" lo spettro di $P(\lambda)$, svolge un ruolo fondamentale; infatti, $\forall x \in X$, $U(t)x$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} A_k u^{(k)} = 0 \\ u^{(h)}(0) = 0, \quad h=0,\dots,n-2, \\ u^{(n-1)}(0) = x \end{cases}$$

(per la dimostrazione si veda [11], Teorema 1 e Corollario 3).

Inoltre, se f è hölderiana, la formula della variazione delle costanti

$$\int_0^t U(t-s) f(s)\, ds$$

fornisce l'unica soluzione del problema con dati iniziali nulli dell'equazione non omogenea $\sum_{k=0}^{n} A_k u^{(k)} = f$ (per la dimostrazione si veda [12], Teorema 3).

La situazione non è invece così chiara per il problema di Cauchy con solo l'h-esimo ($0 \leq h \leq n-2$) dato iniziale non nullo. Anche in questo caso è ancora possibile costruire un propagatore $U_h(t)$, che però risulta definito solo su $X_h = \bigcap_{k=h+1}^{n} \mathcal{D}(A_k)$. Se $x \in X_h$, $U_h(t)x$ fornisce una soluzione dell'equazione che soddisfa le prime $h + 1$ condizioni iniziali, ma senza ipotesi più restrittive sul dato - per esempio che $x \in \bigcap_{k=0}^{n} \mathcal{D}(A_k)$ - non è noto se $U_h(t)x$ assume anche le rimanenti.

3. L'EQUAZIONE u" = Au E LE FUNZIONI COSENO ASTRATTE

Per il Lemma 3, i propagatori del problema di Cauchy relativo all'equazione

$$u'' = Au,$$

che supponiamo ben posto, soddisfano le relazioni

(11) $$S_0(s+t) = S_0(s)\, S_0(t) + AS_1(s)\, S_1(t)$$

(12) $$S_1(s+t) = S_0(s)\, S_1(t) + S_1(s)\, S_0(t).$$

Vediamo ora di mostrare che S_0 verifica una importante equazione funzionale che risulterà di fondamentale importanza nel seguito.

Poniamo, $\forall r,s,t \in [0,+\infty[$,

$$H(r;s,t) = 2\, S_0(s+r) S_0(t+r) - S_0(s+t+2r).$$

Se $x \in \mathcal{D}$ (il sottospazio denso a cui appartengono le condizioni iniziali), la funzione $H(r;s,t)\, x$ è parzialmente derivabile rispetto a r se $r > 0$; per i Lemmi 1 e 2 e per la (12), si ha:

$$\frac{\partial H(r;s,t)x}{\partial r} = 2\, A\, S_1(s+r)\; S_0(t+r)x + 2\, AS_0(s+r)\; S_1(t+r)x +$$

$$+ 2\, A\, S_1(s+t+2r)x = 0$$

Pertanto, per la densità di $\mathcal{D}$ in X, H non dipende da r. Inoltre, $\forall h \in R$, tale che $s+h$, $t+h$, $r+h \in [0,+\infty[$,

$$H(r;s+h,\, t+h) = H(r+h;\, s,t),$$

onde, se $s \geqq t$,

$$H(r;s,t) = H(r+t;\, s-t,0) = H(r;s-t,0),$$

mentre, se $s < t$, per la simmetria di H in s e t, $H(r;s,t) = H(r+s;0,t-s) =$
$= H(r+s;\, t-s,\, 0) = H(r;t-s,\, 0)$.
In definitiva, esiste $K(V) \in L(X)$, $\forall\, V \in [0,+\infty[$, tale che

$$H(r;s,t) = K(|s-t|).$$

D'altra parte, scegliendo $t = 0$, si ottiene

$$K(s) = H(0;s,0) = S_o(s),$$

onde, se $s \geq t \geq 0$,

$$S_o(s+t) + S_o(s-t) = 2\, S_o(s)\, S_o(t).$$

Poniamo ora

$$C(t) = S(|t|) \quad , \quad t \in R.$$

E' una verifica immediata riconoscere che gli operatori $C(t)$ soddisfano l'equazione funzionale di d'Alembert.

(13) $$C(s+t) + C(s-t) = 2C(s)\, C(t) \quad , \forall\, t,\, s \in R.$$

Analogamente, poniamo

$$S(t) = \operatorname{sgn} t \cdot S(|t|) \quad , \quad t \in R.$$

E' immediato riconoscere che, se $x, y \in \mathcal{D}$, la funzione $t \to C(t)x + S(t)\, y$ è soluzione, in tutto R, del problema di Cauchy

(14) $$\begin{cases} u'' = Au\ , \\ u(0) = x\ , \\ u'(0) = y\ , \end{cases}$$

che risulta ovviamente ben posto. Pertanto,

Teorema 7. Se il problema di Cauchy (14) è ben posto in R^+, allora è ben posto anche in R.

Come già riconosciuto da Cauchy, l'equazione (13) è l'equazione funzionale del coseno, in quanto, se una funzione continua $\rho : R \to R$ soddisfa la (13) e $\rho(0) = 1$, allora esiste $a \in R$, tale che $\rho(t) = \cos(at)$ oppure $\rho(t) = \cosh(at)$.

Per questo motivo, viene detta funzione coseno astratta ogni funzione $C : R \to L(X)$ che sia fortemente continua, che verifichi la (13) e tale che $C(0) = I$.

E' poi ovvio dalla definizione che

$$C(t)\, C(s) = C(s)\, C(t), \quad \forall t, s \in R.$$

E' stato dimostrato da Kurepa [9] che, se C è una funzione continua che soddisfa la (13) in un'algebra di Banach con unità, esiste un elemento a dell'algebra tale che

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k}}{(2k)!},$$

il viceversa essendo ovvio. Si noti che, in tal caso, $a = C''(0)$.

Pertando, se una funzione coseno astratta è continua nella topologia uniforme degli operatori, essa è "generata" da un operatore limitato. Se, invece, richiediamo solo la forte continuità - situazione molto più interessante dal punto di vista delle applicazioni - ci dovremo aspettare, come succede per i semigruppi, un "generatore" non limitato.

Chiamiamo allora generatore infinitesimale della funzione coseno astratta C l'operatore A così definito:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X;\ t \to C(t)\,x \text{ è derivabile 2 volte in } R\}$$

$$Ax = C''(0)x.$$

E' possibile mostrare che $\mathcal{D}(A)$ è caratterizzato dalla seguente apparente mente meno restrittiva condizione:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X; \exists \lim_{h \to 0} \frac{2}{h^2} (C(h)\, x - x)\}.$$

L'importanza delle funzioni coseno astratte deriva dal seguente risultato dovuto essenzialmente a Fattorini [4].

Teorema 8. Il problema di Cauchy per l'equazione

$$u'' = Au$$

è ben posto se, e solo se, A è il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta.

Riportiamo, pertanto, alcuni risultati dovuti a Sova [13], che è stato l'iniziatore di questa teoria sulle funzioni coseno astratte.

Proposizione 9. Il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta è chiuso e ha dominio denso.

Dimostrazione. Si vedano i Teoremi 2.17 e 2.20 in [13].

Proposizione 10. Se $x \in \mathcal{D}(A)$, allora

$$C''(t)\, x = AC(t)x = C(t)Ax, \quad \forall t \in R.$$

Dimostrazione. Si vedano le Proposizioni 2.13 e 2.18 in [13].

Proposizione 11. Una funzione coseno astratta C è di tipo esponenziale, cioè $\exists M,\ \omega \in [0,+\infty[$, tali che

(15) $\qquad \|C(t)\| \leq M \cosh(\omega t) \quad , \forall t \in R.$

Dimostrazione. Si veda il Teorema 2.3 in [10].

A differenza di quanto accade per i semigruppi, può non esistere un ω ottimale per cui vale la (15). Ad esempio, sia $X = \mathbb{C}^2$

$$C(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{Vmatrix} \quad , \quad t \in R.$$

Allora C è una funzione coseno astratta, per la quale la (15) vale $\forall \omega \in R^+$ (con M opportuno, dipendente da ω), ma non vale se $\omega = 0$.

Comunque si ha il risultato seguente, che collega la crescenza di una funzione coseno astratta con la collocazione dello spettro del suo generatore infinitesimale.

Teorema 12. Se la funzione coseno astratta C soddisfa la (15) e A è il suo generatore infinitesimale, allora $\lambda^2 \in \rho(A), \forall \lambda \in C$, Re $\lambda > \omega$.

Dimostrazione. Si veda la Proposizione 2.19 in [13].

E' poi possibile dare una caratterizzazione dei generatori infinitesimali di funzioni coseno astratte che ricorda il Teorema di Hille-Yosida.

Teorema 13. Sia A un operatore chiuso e con dominio denso. Allora A è il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta C che verifica la (15) se, e solo se:

i) $\{\lambda^2 \in C;\ \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$;

ii) $\left\| \dfrac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda (A-\lambda^2)^{-1}) \right\| \leq$

$$\leq \frac{1}{2} M \cdot n\,!\,\left((\mathrm{Re}\ \lambda-\omega)^{-n-1} + (\mathrm{Re}\ \lambda + \omega)^{-n-1} \right),$$

$\forall n \in Z^{+} \cup \{0\}, \ \forall \lambda \in C, \ \mathrm{Re}\ \lambda > \omega.$

A causa della presenza del fattore λ sotto il segno di derivata nella stima ii), anche in situazioni relativamente favorevoli come quando $M = 1$, la verifica di ii) non può ridursi al solo caso $n = 1$, come succede per l'analoga situazione dei semigruppi di contrazione.

Anche per questo motivo, si è sviluppata una teoria perturbativa abbastanza ampia per i generatori infinitesimali di funzioni coseno astratte (per una bibliografia sull'argomento si veda [10], n. 4.5.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BREZIS-L.E. FRAENKEL: A Function with Prescribed Initial Derivatives in Different Banach Spaces, J. Functional Anal., 29 (1978), 328-335.

[2] J.CHAZARAIN: Problèmes de Cauchy abstraits et application à quelques problèmes mixtes, J. Functional Anal., 7 (1971), 386-446.

[3] JÜ.A. DUBINSKII: On Some Differential-Operator Equations of Arbitrary Order, Mat. Sb., 90 (132) (1973), 1-22 (in russo) = Math. USSR-Sb., 19 (1973), 1-21.

[4] H.O. FATTORINI: Ordinary Differential Equations in Linear Topological Spaces. I, J. Differential Equations, 5 (1968), 72-105.

[5] id. The Underdetermined Cauchy Problem in Banach Spaces, Math. Ann., 200 (1973), 103-112.

[6] H.O. FATTORINI-A. RADNITZ: The Cauchy Problem with Incomplete Initial Data in Banach Space, Michigan Math. J.,18 (1971), 291-320.

[7] P. GRISVARD: Equations différentielles abstraites, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) 2 (1969), 311-395.

[8] E. HILLE: Une généralisation du problème de Cauchy, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 4 (1952), 31-48.

[9] S. KUREPA: A Cosine Functional Equation in Banach Algebras, Acta Sci. Mat. (Szeged), 23 (1962), 255-267.

[10] D. LUTZ: Strongly Continuous Operator Cosine Functions, Proc. Conf. held at Dubrovnik, November 2-14, 1981, Lecture Notes in Math., vol. 948, Springer (1982).

[11] E. OBRECHT: Sul problema di Cauchy per le equazioni paraboliche astratte di ordine n, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 53 (1975), 231-256.

[12] id. : Sulle equazioni paraboliche semilineari di ordine arbitrario in uno spazio di Banach, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 57 (1977), 231-246.

[13] M. SOVA: Cosine Operator Functions, Rozprawy Mat., 49 (1966).